

Fondamenti di Informatica

Algebra di Boole

Prof.ssa Enrica Gentile
 Informatica e Comunicazione Digitale
 a.a. 2011-2012

Algebra di Boole

- Si basa su tre operazioni logiche:
 - AND (*)
 - OR (+)
 - NOT (!)
- Gli operandi possono avere solo due valori:
 - Vero (1)
 - Falso (0)
- Si possono comporre delle espressioni logiche più o meno complesse
 - (A AND B) OR C
 - (NOT A) OR B

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 2

Tavole di verità

AND	0	1
0	0	0
1	0	1

OR	0	1
0	0	1
1	1	1

NOT	0	1
	1	0

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 3

Esempio di espressioni

A	B	C	A OR (B AND C)	A AND (B OR (NOT C))
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

4

Trasformazione

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Si può specificare l'output di ogni funzione booleana esprimendo, tramite una espressione booleana, quali combinazioni delle variabili di input determinano l'output 1
- 011-101-110-111
- !ABC+A!BC+AB!C+ABC

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

5

Prima forma canonica

- Per passare dalla rappresentazione mediante tabella di verità alla notazione tramite espressione booleana è necessario:
 1. Identificare tutte le righe della tabella di verità che danno 1 in output;
 2. Per ogni riga con un 1 in output scrivere la configurazione delle variabili che la definiscono (tutte le variabili della configurazione saranno in AND tra loro)
 3. Collegare tramite OR tutte le configurazioni ottenute.
- La rappresentazione così ottenuta è detta:

prima forma canonica.

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

6

Esercizio

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

7

Risoluzione

$$\neg A!BC + !A!BC + A!B!C + ABC$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

8

Equivalenza

- Def. Due funzioni booleane si dicono *equivalenti* se presentano lo stesso output per qualsiasi configurazione dell'input.

- $\neg A!BC + A!BC + ABC = A(B + C)$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

9

Funzione più semplice

- Determinare la più semplice funzione booleana equivalente alla funzione data facilitata l'interpretazione della funzione stessa e permette di semplificare anche i circuiti logici corrispondenti.
- Una funzione f' è più semplice di una funzione f ($f \equiv f'$) secondo il *criterio del minor numero di operatori* se il suo calcolo richiede meno operazioni di AND e OR rispetto al calcolo di f .

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

10

Proprietà dell'algebra di Boole

Commutativa	$a+b=b+a$	$a*b=b*a$
Associativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a*b)*c=a*(b*c)$
Idempotenza	$a+a=a$	$a*a=a$
Assorbimento	$a+(a*b)=a$	$a*(a+b)=a$
Distributiva	$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$	$a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$
Min e Max	$a*0=0$	$a+1=1$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a*1=a$
Complemento	$a!*a=0$	$a+!a=1$
De Morgan	$!(a+b)=!a!*b$	$!(a*b)=!a+!b$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

11

Esercizio

- Minimizzare l'espressione logica:
 $A+AB+CB+C!B$

Risoluzione:

- $A(1+B)+C(B+!B)$
- $A+C$

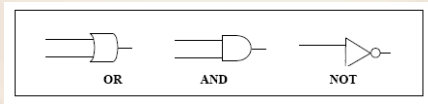
Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

12

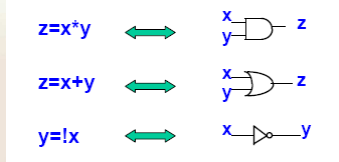
Porte Logiche

- Possiamo esprimere delle operazioni logiche attraverso le porte logiche che simulano le funzioni dell'algebra di boole



Equivalenza tra funzioni e circuiti

- Esiste una equivalenza tra le funzioni logiche e le porte elementari delle reti logiche (Shannon)



Funzioni ed espressioni

Espressioni equivalenti

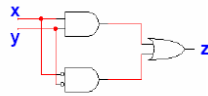
- $f = x + y * !z + !y * z$
- $f = x * !z + x * y + y * !z + !y * z$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Esempio

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$z = xy + !x!y$$

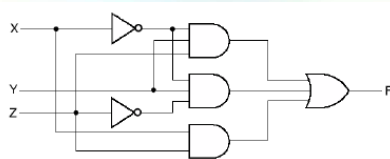


Prof.ssa E. Gentile

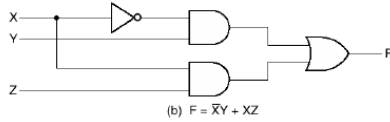
Fondamenti di Informatica

16

Esempio



$$(a) F = \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + XZ$$

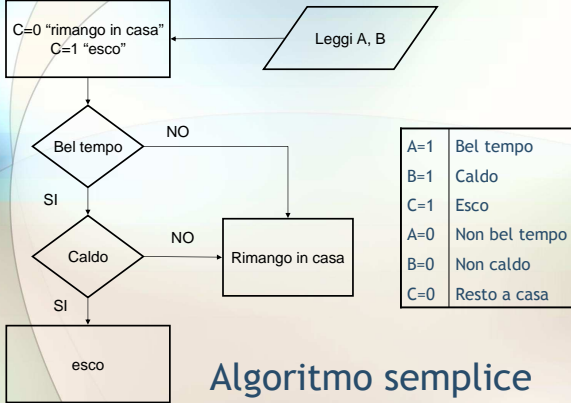


$$(b) F = \bar{X}\bar{Y} + XZ$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

17



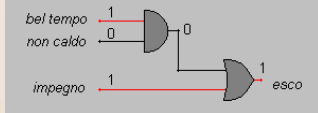
Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

18

Lettura dell'IF

- IF A AND B THEN C
- SE bel tempo E caldo ALLORA esco
- SE non bel tempo E caldo ALLORA resto a casa
- SE bel tempo E non caldo ALLORA resto a casa
- SE non bel tempo E non caldo ALLORA resto a casa



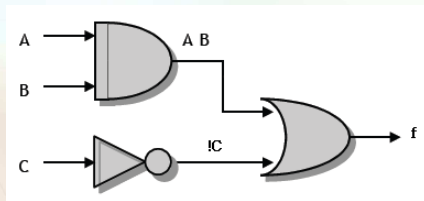
Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

19

Rete combinatoria

➤ $F(A,B,C) = AB + !C$

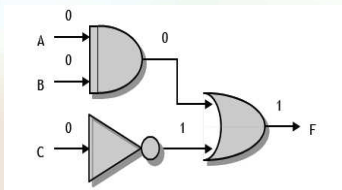


Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

20

➤ $F(0,0,0) = 1$



Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

21

Esercizio

- Applicando i teoremi dell'algebra di Boole, verificare la seguente equivalenza tra espressioni
- $!A!B!C + B!C + A(B + !B!C) = AB + !C$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

22

Esercizio

- Applicando i teoremi dell'algebra di Boole, semplificare le seguenti espressioni e disegnarne la tavola di verità e la rete logica

$$AB!C + AB + AC + C$$

$$!A!BC + A!B + !A!B + AB$$

$$A + AB + B + BC$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

23

Esercizio

- Disegnare il circuito logico della seguente espressione

$$!((AB) + (!BC))$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

24

Sintesi delle reti combinatorie

- 1a forma canonica, somma di prodotti (mintermini)
 - Si considerano le righe della tabella delle verità il cui valore è 1
- 2a forma canonica: prodotto logico dei termini somma (maxtermini)
 - Si considerano le righe della tabella delle verità il cui valore è 0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

25

Esercizio funzione maggioranza

- Si chiede di sintetizzare (in 1° forma canonica) una funzione combinatoria dotata di 3 ingressi A, B e C, e di un'uscita F, funzionante come segue:
 - Se la maggioranza degli ingressi vale 0, l'uscita vale 0
 - Se la maggioranza degli ingressi vale 1, l'uscita vale 1
- In sintesi: L'uscita vale 1 se e solo se 2 o tutti e 3 gli ingressi valgono 1 (cioè se e solo se il valore 1 è in maggioranza)

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

26

Tabella funzione maggioranza

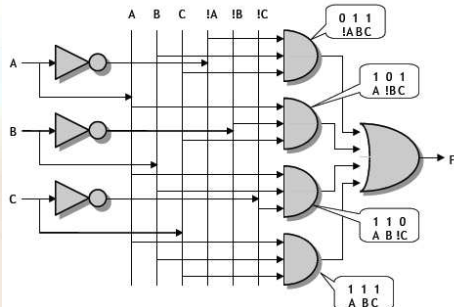
A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

27

Schema logico



Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

28

Funzione combinatoria

- Dallo schema logico della rete combinatoria così sintetizzata, si può ricavare la funzione combinatoria data come espressione booleana come somma di prodotti
- $F(A, B, C) = !A!B!C + !A!BC + !A B !C + !A B C$

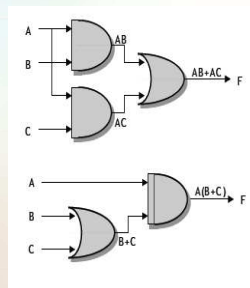
Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

29

Reti equivalenti

- $F1 = AB + AC$
- $F2 = A(B + C)$
- $F1 = AB + AC = A(B + C) = F2$



Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

30

Operazioni NAND e NOR

NAND

A	B	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

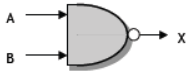
Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

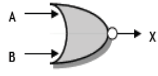
31

Rete NAND e NOR

NAND



NOR



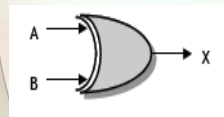
Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

32

XOR o OR Esclusivo

$A \oplus B = !AB + A!B$



A	B	\oplus
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

33

Esercizi

- $F = \neg(\neg(A+B) + \neg(A+C))$
- $F = CD + B + A + C$
- $F = (A+B+\neg C+D)(A+\neg B+\neg C+D)(A+\neg B+\neg C+\neg D)$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

34

Esercizi

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

35

Mappa di Karnaugh

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		A	
		0	1
B	0	0	1
	1	1	0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

36

Mappa di Karnaugh a 3 valori

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

AB \ C	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

37

Mappa di Karnaugh a 4 valori

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		
11		1	1	
10	1	1		1

$\neg A \neg C + \neg C D + \neg B \neg D + A B D$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

38

Esempio

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	0	0
10	0	1	1	0

- $1^\circ F_c = \neg A \neg B C D + \neg A B \neg C \neg D + \neg A B C \neg D + \neg A \neg B C \neg D + A \neg B C \neg D + A B \neg C \neg D + A B C \neg D + A \neg B C \neg D$
- Implicanti primi:
 - $\neg B \neg D$, $\neg A C D$, $\neg A B C$, $A B \neg C$
- Imp. primi essenziali:
 - $\neg B \neg D$, $\neg A C D$, $A B \neg C$
- Copertura minima:
 - $\neg B \neg D + \neg A C D + A B \neg C$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

39

Esercizio

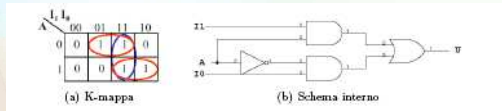
- $F = !A!B!C + !A!BC + A!B!C + A!BC$
- $F = !AC!D + !ABC + B!CD + A!C$
- $F = (A+!B+C)(!A+!B+C)(A+!B+!C)(!A+!B+!C)$
- $F = (!B+!C+D)(A+!C+!D)(B+C+!D)(!A+C+D)$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

40

Equivalenza tra Karnaugh e le reti logiche



Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

41

Semplificazione

- Per n variabili si può dire che:
 - Due 1 adiacenti rappresentano un prodotto di n-1 variabili
 - Quattro 1 adiacenti rappresentano un prodotto di n-2 variabili
 - Otto 1 adiacenti rappresentano un prodotto di n-3 variabili
 - Sedici 1 adiacenti rappresentano un prodotto di n-4 variabili
 - Etc...

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

42

Metodo di minimizzazione

- Si rappresenta la funzione logica sulla mappa
- Si localizzano sulla mappa i più grandi raggruppamenti possibili di 1 adiacenti che formano potenze di due
- Si sceglie il numero minimo di raggruppamenti che copre tutti gli 1 della mappa tenendo presente che eventuali termini isolati debbono essere riportati integralmente

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

43

Esempio

- $f = !A!B!C + !ABC + !AB!C + A!B!C + A!BC$

	AB			
C	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

➤ $f = !AB + !A!C + A!B$

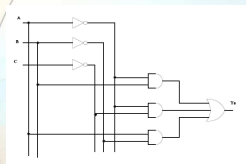
➤ $f = !AB + A!B + !B!C$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

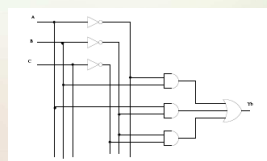
44

Reti logiche



$f = !AB + !A!C + A!B$

$f = !AB + A!B + !B!C$



Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

45

Esempio

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	0	1	0
10	0	1	0	0

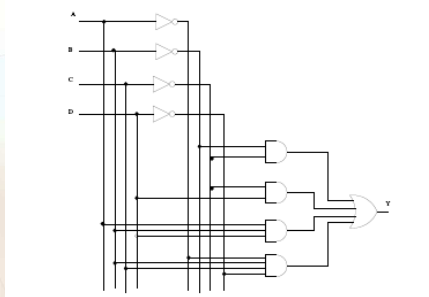
$$f = !B!C + !CD + ABD + !ABC!D$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

46

Rete logica



Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

47

Funzione a 5 variabili

$$f = !A!BC!DE + !ABC!DE + !A!BCDE + !ABCDE + ABC!DE + ABCDE + A!BCDE + A!BCD!E$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

48

Minimizzare funzione a 5 variabili

		A = 0				A = 1			
		BC				BC			
DE		00	01	11	10	00	01	11	10
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	0	0	1	1	0	0	0	1	0
11	0	0	1	1	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0

$$F = !ACE + A!B!CD + BCE$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

49

Esercizio 1

		AB			
		CD			
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	0
01	1	0	1	1	1
11	1	1	1	1	1
10	0	1	0	0	0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

50

Esercizio 2

		AB			
		CD			
		00	01	11	10
00	0	1	0	0	0
01	1	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1
10	0	0	0	0	0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

51

Esercizio 3

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

52

Somma di numeri binari

Regole

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$ con riporto di 1

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

53

Sottrazione di numeri binari

Regole

- $0 - 0 = 0$
- $1 - 1 = 0$
- $1 - 0 = 1$
- $0 - 1 = 1$ con prestito di 1

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

54

Sottrazione con complemento a 2

- Trasformo la sottrazione in somma utilizzando il complemento a 2 del secondo termine
- Cambio degli 1 con 0 e viceversa, più 1
 - La sottrazione $0101 - 0011$
 - Equivale alla somma $0101 + 1101$
- Riporto finale 1 indica risultato positivo
- Riporto finale 0 indica risultato negativo
- Il riporto può essere ignorato

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

55

Prodotto di numeri binari

- Regole
 - $0 * 0 = 0$
 - $0 * 1 = 0$
 - $1 * 0 = 0$
 - $1 * 1 = 1$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

56

Somma

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

57

Somma

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

58

Somma

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 1\ 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

59

Somma

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

60

Somma

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad + \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad = \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

61

Somma

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad + \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad = \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

62

Somma

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad + \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad = \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

63

Somma

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

64

Somma

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

65

Sottrazione

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 1\ - \\ 0\ 0\ 1\ 1\ = \\ \hline 0\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 1\ 0\ 1\ = \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

66

Sottrazione

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ - \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ = \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ + \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ = \\ \hline 0 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

67

Sottrazione

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ - \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ = \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ + \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ = \\ \hline 1 \ 0 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

68

Sottrazione

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ - \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ = \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ + \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ = \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

69

Sottrazione

1	1					
	0	1	0	1	-	
	0	0	1	1	=	
	0	1	0	1	+	
	1	1	0	1	=	
0	0	1	0			

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 70

Sottrazione

	0	1	0	1	-	
	0	0	1	1	=	
	0	1	0	1	+	
	1	1	0	1	=	
1	0	0	1	0		

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 71

Prodotto

	1	0	1	1	0	1	*
	1	1	1	1	0		=

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 72

Prodotto

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ * \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

73

Prodotto

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ * \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

74

Prodotto

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ * \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ = \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

75

Prodotto

$$\begin{array}{r} 101101 * \\ 11110 = \\ \hline 000000 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ \hline 10101000110 \end{array}$$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

76

Esercizio 1

➤ Somma e sottrazione dei numeri:

➤ $45 + 23$

➤ $56 + 32$

➤ $75 + 16$

➤ Prodotto dei numeri:

➤ $5 * 3$

➤ $7 * 4$

➤ $8 * 9$

Prof.ssa E. Gentile

Fondamenti di Informatica

77
